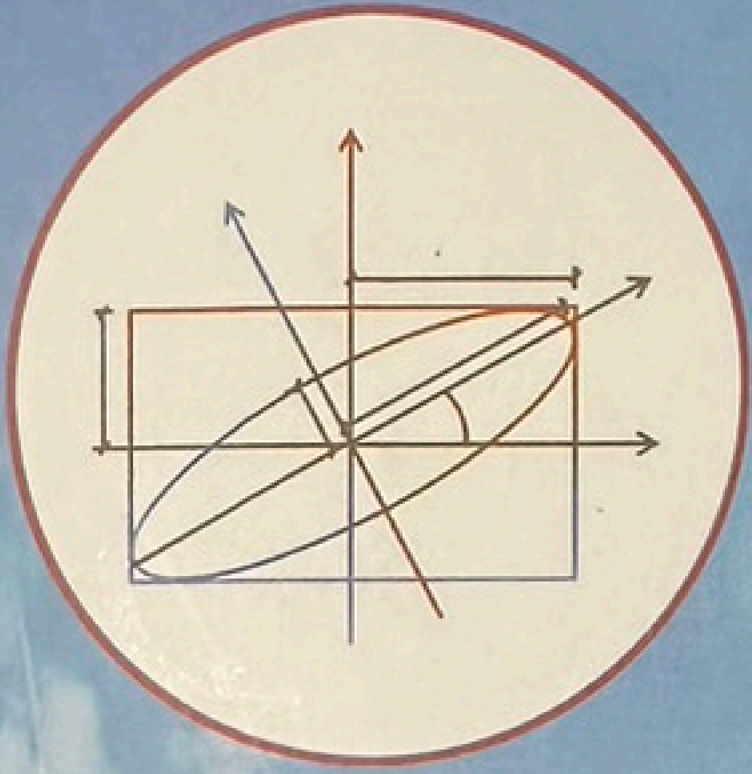
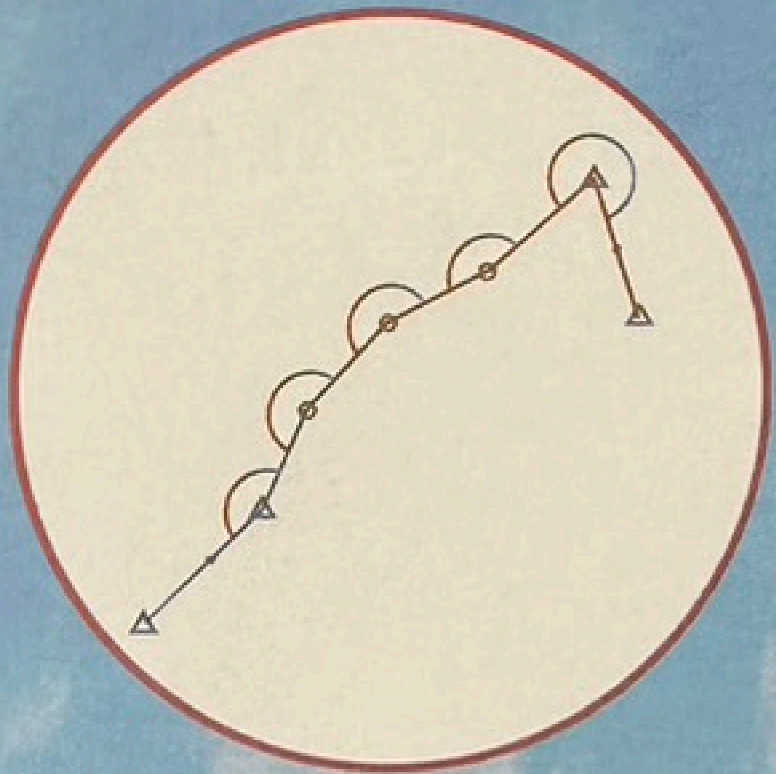
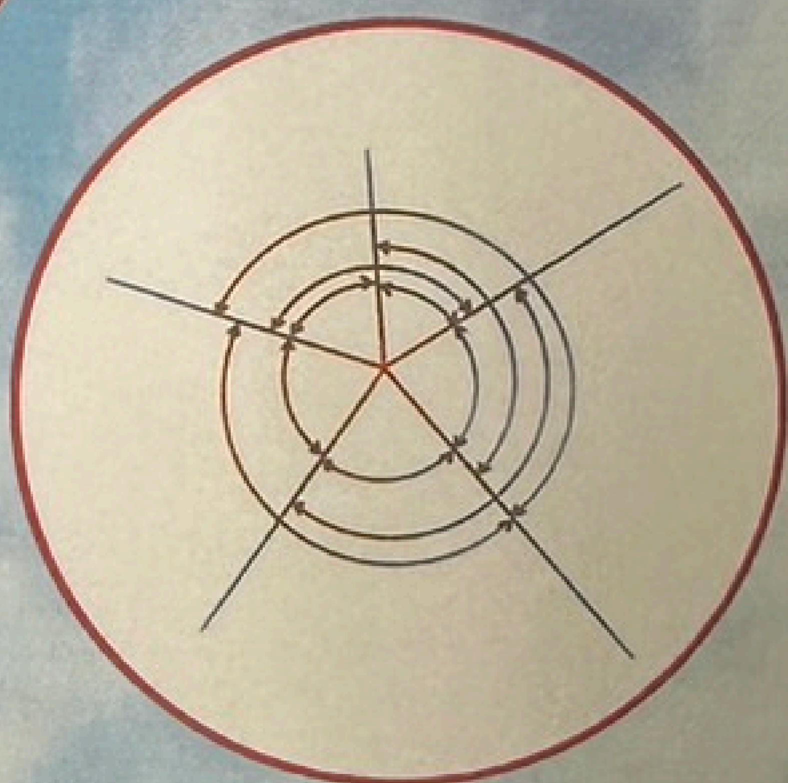
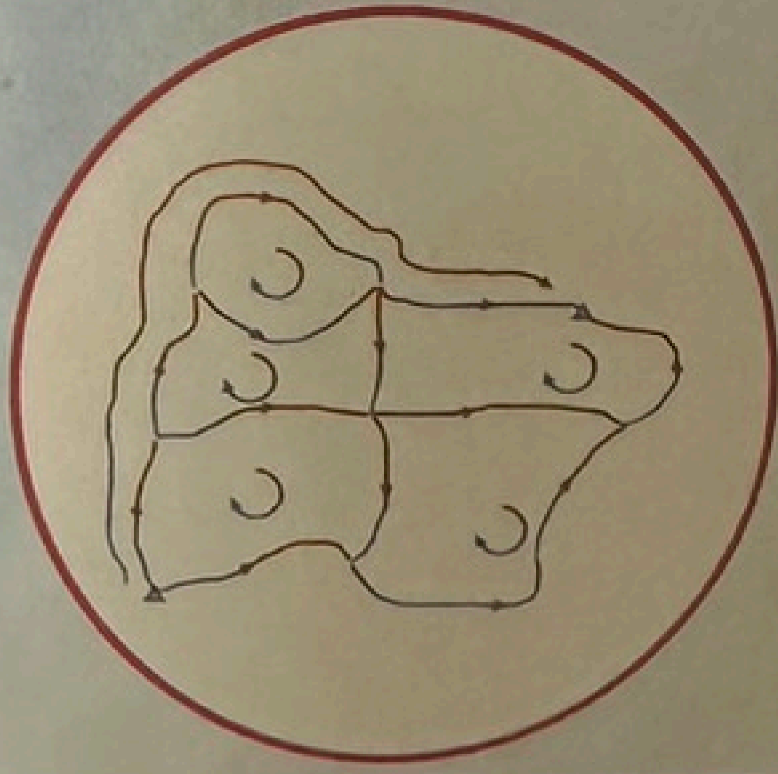
สำนักพิมพ์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

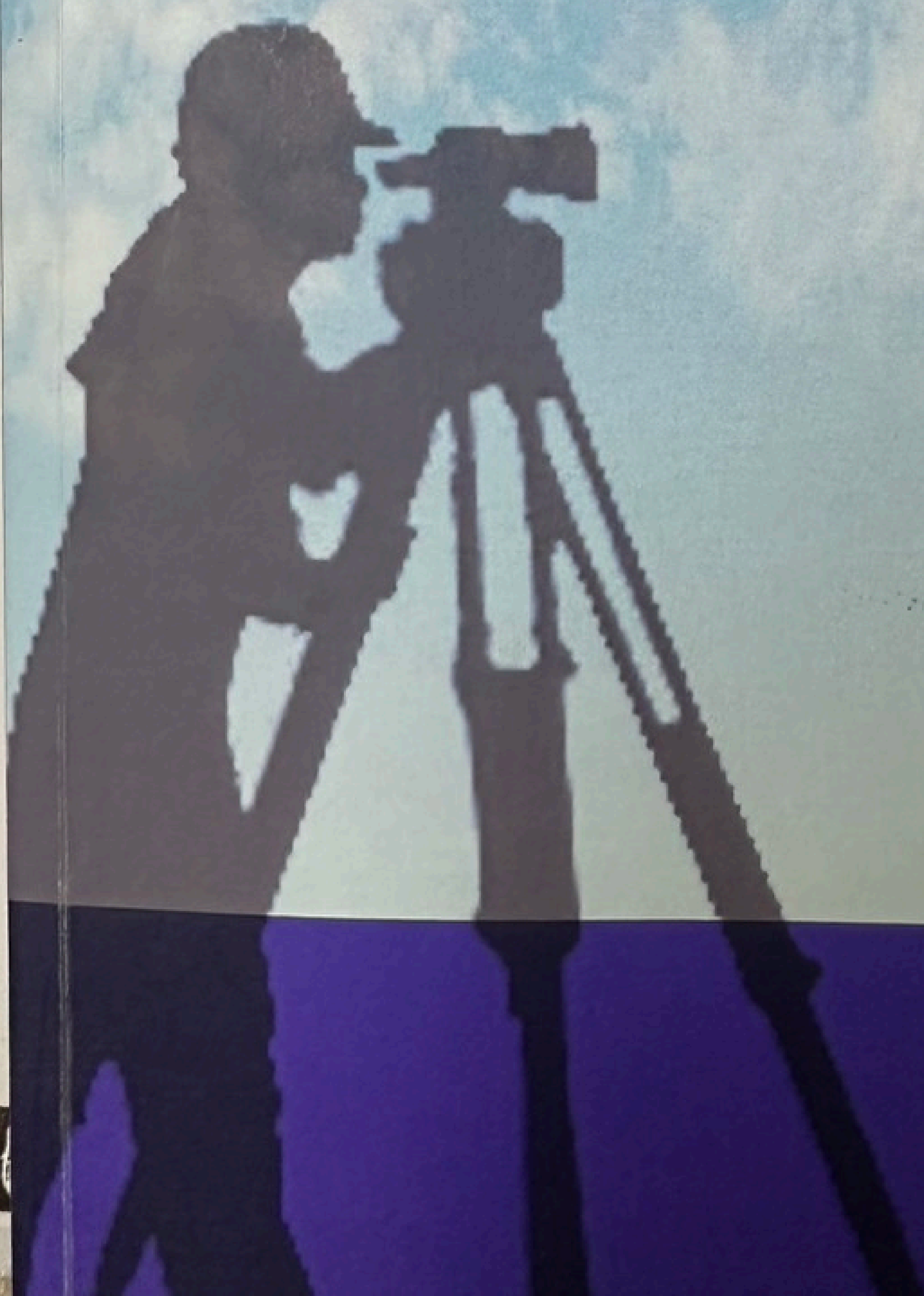
การคำนวณปรับแก้ใน งานสำรวจ











ดีบุญ เมธากุลชาติ

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

บทที่ 2
การแพร่ของความคลาดเคลื่อน
(PROPAGATION OF ERRORS)

การแพร่ของความคลาดเคลื่อนเป็นการศึกษาเรื่องเพื่อใช้หาความคลาดเคลื่อนของปริมาณวัดที่ไม่ได้เกิดจากการวัดโดยตรง เช่น วัดปริมาณของสิ่ง A และ B เพื่อหาค่าของปริมาณของสิ่ง C โดย C มีค่าเท่ากับ A บวก B เนื่องจาก ค่าของ C มิได้เกิดจากการวัดโดยตรง จึงไม่ทราบความคลาดเคลื่อน ทฤษฎีการแพร่ของความคลาดเคลื่อนใช้คำนวณความคลาดเคลื่อนของ C หากทราบความคลาดเคลื่อนของ A และ B

ทฤษฎีการแพร่ของความคลาดเคลื่อนมิได้ตั้งต้นที่ความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกต แต่ตั้งต้นที่ความแปรปรวน (variance) ของค่าสังเกต แล้วจึงคำนวณความแปรปรวนของปริมาณอื่นที่เกี่ยวเนื่อง หากจะเรียกว่า การแพร่ของความแปรปรวน ก็คงจะไม่ผิด

2.1 เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม

เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม (variance and covariance matrix) คือ เมทริกซ์ที่เก็บค่าความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของปริมาณวัดตั้งแต่ 1 สิ่งขึ้นไป การใช้เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม ก็เพื่อลดความยุ่งยากในการเขียนสมการคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของค่าสังเกตหลายๆตัว

เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม เรียกสั้นๆว่า เมทริกซ์ความแปรปรวน มีค่าความแปรปรวนอยู่ในแนวทแยง (diagonal) ของเมทริกซ์จากบนลงล่าง เรียงกันไปตามลำดับของค่าสังเกต ส่วนความแปรปรวนร่วมอยู่ในตำแหน่งที่มีเลขแถวและหลักตรงกันกับค่าสังเกตที่เป็นคู่ความแปรปรวนร่วมกันนั้นๆ หากไม่มีความแปรปรวนร่วมระหว่างค่าสังเกตคู่ใด ก็ใส่เลขศูนย์ลงไปในตำแหน่งตามคู่สังเกตนั้นๆ

กำหนดให้ X คือ เวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม

Σ_x คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad => \quad \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad => \quad \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad => \quad \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1x_3} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2x_3} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x_2x_n} \\ \sigma_{x_1x_3} & \sigma_{x_2x_3} & \sigma_{x_3}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x_3x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \sigma_{x_1x_n} & \sigma_{x_2x_n} & \sigma_{x_3x_n} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

$\sigma_x^2 = 10 \qquad \sigma_y^2 = 16 \qquad \sigma_{xy} = 12$

ดังนั้น

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

$\sigma_x^2 = 10 \qquad \sigma_y^2 = 16 \qquad \sigma_z^2 = 8$ ความแปรปรวนร่วมไม่มี

ดังนั้น

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u>

ระยะ x วัดได้ 22.78 ± 0.02 เมตร

ระยะ y วัดได้ 350.67 ± 0.03 เมตร

และกำหนดให้การวัดระยะ x และ y เป็นอิสระไม่ขึ้นต่อกัน

ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวนของ x และ y คือ

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02^2 & 0 \\ 0 & 0.03^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0004\,m^2 & 0 \\ 0 & 0.0009\,m^2 \end{bmatrix}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. เมทริกซ์ความแปรปรวนอาจมีขนาด 1 x 1 (หนึ่งคูณหนึ่ง) ก็ได้

2. เมทริกซ์ความแปรปรวนเป็นเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) เพราะความแปรปรวนร่วมระหว่าง x กับ y มีค่าเท่ากับความแปรปรวนร่วมระหว่าง y กับ x
3. ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมเป็นปริมาณที่มีหน่วย
4. หน่วยของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมเป็นหน่วยเดียวกับหน่วยของปริมาณนั้นแต่ยกกำลังสอง

2.2 องค์ประกอบความแปรปรวนและเมทริกซ์โคแฟคเตอร์

เมทริกซ์ความแปรปรวนสามารถแยกตัวเองออกเป็น 2 องค์ประกอบ โดยองค์ประกอบตัวที่หนึ่งเป็นตัวเลข เรียกว่า องค์ประกอบความแปรปรวน (variance component) และองค์ประกอบตัวที่สองเป็นเมทริกซ์ เรียกว่า เมทริกซ์โคแฟคเตอร์ (cofactor matrix) เมื่อนำองค์ประกอบทั้งสองมาคูณกัน จะได้เมทริกซ์ความแปรปรวน เขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q \qquad (2.1)$$

โดย

Σ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวน

σ_0^2 คือ องค์ประกอบความแปรปรวน

Q คือ เมทริกซ์โคแฟคเตอร์

หน่วยของเมทริกซ์โคแฟคเตอร์เป็นหน่วยเดียวกันกับหน่วยของความแปรปรวน แต่องค์ประกอบความแปรปรวนเป็นเพียงตัวเลขที่ไม่มีหน่วย และจะเป็นเลขอะไรก็ได้ องค์ประกอบความแปรปรวนมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ความแปรปรวนน้ำหนักหนึ่งหน่วย (variance of unit weight)

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของเมทริกซ์ความแปรปรวนที่แยกตัวออกเป็น 2 องค์ประกอบ ในแบบต่างๆกัน ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \qquad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 1$$

ดังนั้น

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q$$

$$= 1\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \qquad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 2$$

ดังนั้น

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q$$
$$= 2\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad => \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \qquad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 4$$

ดังนั้น

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q$$
$$= 4\begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad => \quad Q = \begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง จะเห็นว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนตัวเดียวกัน สามารถมีองค์ประกอบความแปรปรวนได้หลายค่า เพราะองค์ประกอบความแปรปรวนจะเป็นเลขอะไรก็ได้ แต่ว่าเมื่อองค์ประกอบความแปรปรวนเป็นเลขใดแล้ว เมทริกซ์โคแฟคเตอร์ก็จักต้องเปลี่ยนตามไปให้สอดคล้องด้วย เพื่อให้ผลคูณขององค์ประกอบความแปรปรวนและเมทริกซ์โคแฟคเตอร์ มีค่าเท่ากับเมทริกซ์ความแปรปรวน

2.3 น้ำหนัก

ในการคำนวณปรับแก้ น้ำหนักเป็นตัวแปรที่สำคัญมากที่มีผลต่อการคำนวณปรับแก้ หมายความว่าผลของการคำนวณปรับแก้จะออกมาเป็นเช่นไร ขึ้นอยู่กับน้ำหนักของค่าสังเกตที่กำหนดเข้าไป ค่าสังเกตที่มีน้ำหนักมาก จะได้รับค่าตรวจแก้ที่น้อย และค่าสังเกตที่มีน้ำหนักน้อย จะได้รับค่าตรวจแก้ที่มาก ในทฤษฎีการคำนวณปรับแก้ เรื่องของน้ำหนักเป็นเรื่องของความสัมพัทธ์ ไม่จำเป็นต้องรู้น้ำหนักที่แท้จริงของค่าสังเกต เพียงทราบค่าสัมพัทธ์หรือค่าเปรียบเทียบของระหว่างน้ำหนักของค่าสังเกตทั้งหลาย ก็ทำการคำนวณปรับแก้ได้แล้ว

ทฤษฎีการคำนวณปรับแก้ได้นิยามความหมายของน้ำหนักว่า น้ำหนัก คือ ส่วนกลับของโคแฟคเตอร์ และในทำนองกลับกัน โคแฟคเตอร์ก็เป็นส่วนกลับของน้ำหนัก เขียนความสัมพันธ์ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$P = Q^{-1} \tag{2.2}$$

$$Q = P^{-1}$$ (2.

โดย

P คือ เมทริกซ์น้ำหนัก

Q คือ เมทริกซ์โคแฟคเตอร์

เนื่องจากน้ำหนักเป็นส่วนกลับของโคแฟคเตอร์ ดังนั้น น้ำหนักจึงเป็นปริมาณที่มีหน่วย และหน่วย ของน้ำหนักเป็นส่วนกลับกับหน่วยของโคแฟคเตอร์และความแปรปรวน

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของเมทริกซ์ความแปรปรวน โคแฟคเตอร์ และน้ำหนัก ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 1$$

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q$$

$$= 1\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P = Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \\ -0.75 & 0.625 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 2$$

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q$$

$$= 2\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P = Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1.5 \\ -1.5 & 1.25 \end{bmatrix}$$

<u>ข้อสรุปเรื่องความแปรปรวน โคแฟคเตอร์ และน้ำหนัก</u>

1. เมทริกซ์ความแปรปรวน โคแฟคเตอร์ และน้ำหนัก มีหน่วยเสมอ

2. หน่วยของความแปรปรวน โคแฟคเตอร์ และน้ำหนัก เป็นหน่วยเดียวกับหน่วยของปริมาณวัด หรือค่าสังเกต เช่น วัดระยะทางเป็นเซนติเมตร หน่วยของความแปรปรวน และโคแฟคเตอร์ ก็เป็น ซม.^{2} และหน่วยของน้ำหนัก ก็เป็น ซม.$^{-2}$
3. องค์ประกอบความแปรปรวนเป็นตัวคูณมาตรส่วนของเมทริกซ์โคแฟคเตอร์ และเป็นตัวเลขที่ไม่มีหน่วย
4. ความแปรปรวนมีค่าเดียว แต่องค์ประกอบความแปรปรวนมีได้หลายค่าเพราะเป็นเลขอะไรก็ได้ เมื่อค่าขององค์ประกอบความแปรปรวนเปลี่ยนไป ค่าของโคแฟคเตอร์ก็ต้องเปลี่ยนตามไปด้วย
5. ทั้งโคแฟคเตอร์ และน้ำหนัก เป็นเพียงค่าสัมพัทธ์ จะทราบค่าที่แท้จริง (สัมบูรณ์) ได้ ต้องอาศัยค่าองค์ประกอบความแปรปรวน

2.4 การแพร่ของความแปรปรวน

<u>กรณีสมการเชิงเส้น</u>

เริ่มจาก**สมการตั้งต้น**

$$Y = A X + L_0 \qquad (2.4)$$

โดย

- Y คือ ปริมาณที่ต้องการทราบค่า
- X คือ ปริมาณที่เกิดจากการวัด
- A คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของปริมาณวัด
- L_0 คือ ค่าคงที่ (อาจมีหรือไม่มีก็ได้)

<u>ปัญหา</u> X เป็นค่าสังเกตที่เกิดจากการวัด และ Y เป็นฟังก์ชันของ X (เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น) หากทราบความแปรปรวนของ X อยากทราบว่าความแปรปรวนของ Y เป็นเท่าไร

<u>แนวคิด</u> เนื่องจาก L_0 เป็นค่าคงที่ จึงไม่มีความแปรปรวน คงมีแต่ความแปรปรวนของ X ที่แพร่มาสู่ Y ดังนี้

$$\Sigma_Y = A \Sigma_X A^T \qquad (2.5)$$

(ดูรายละเอียดของที่มาของสมการนี้ ในภาคผนวก จ)

โดย

- Σ_Y คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนของ Y
- Σ_X คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนของ X