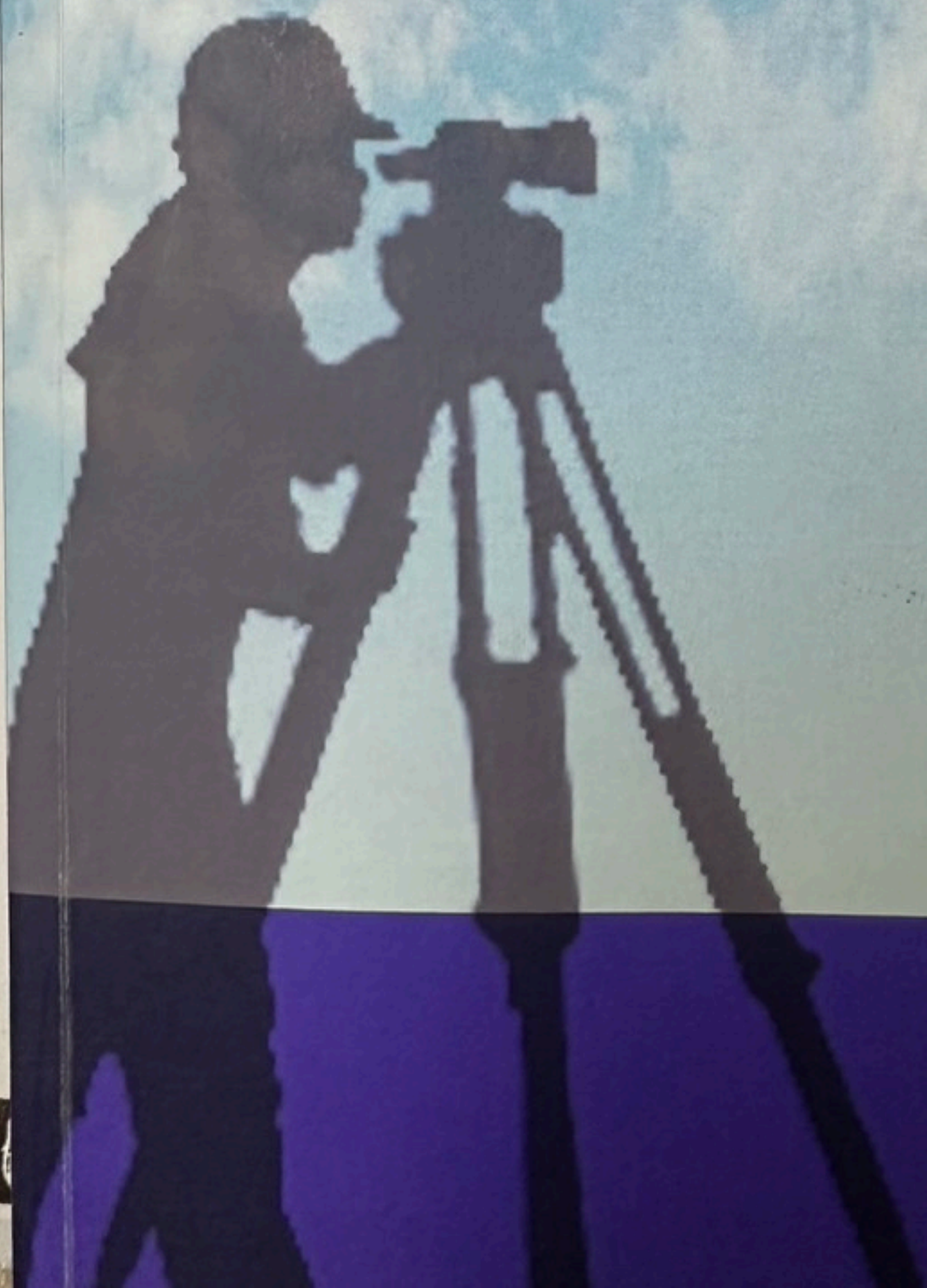
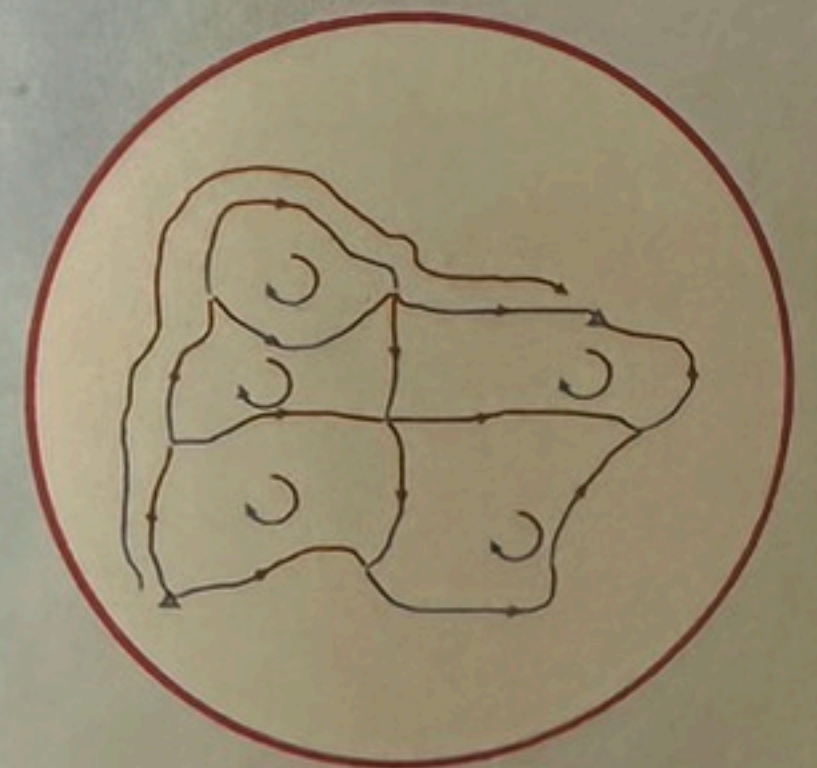
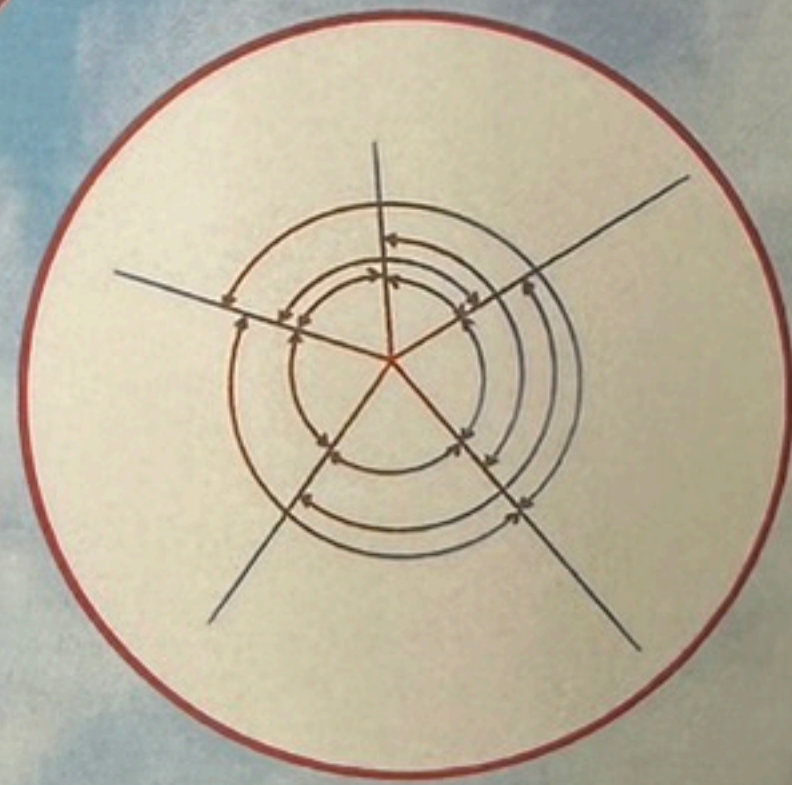
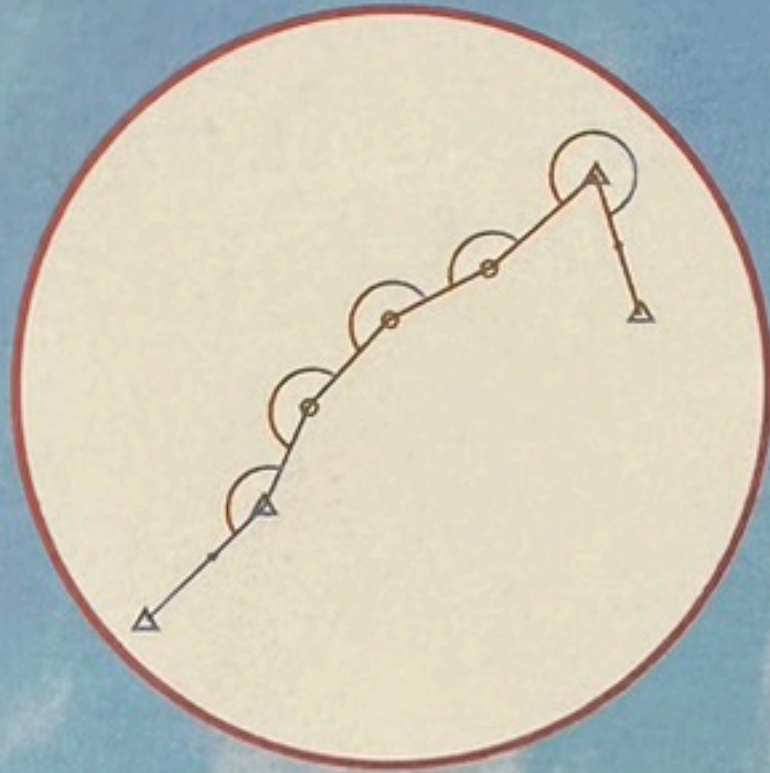
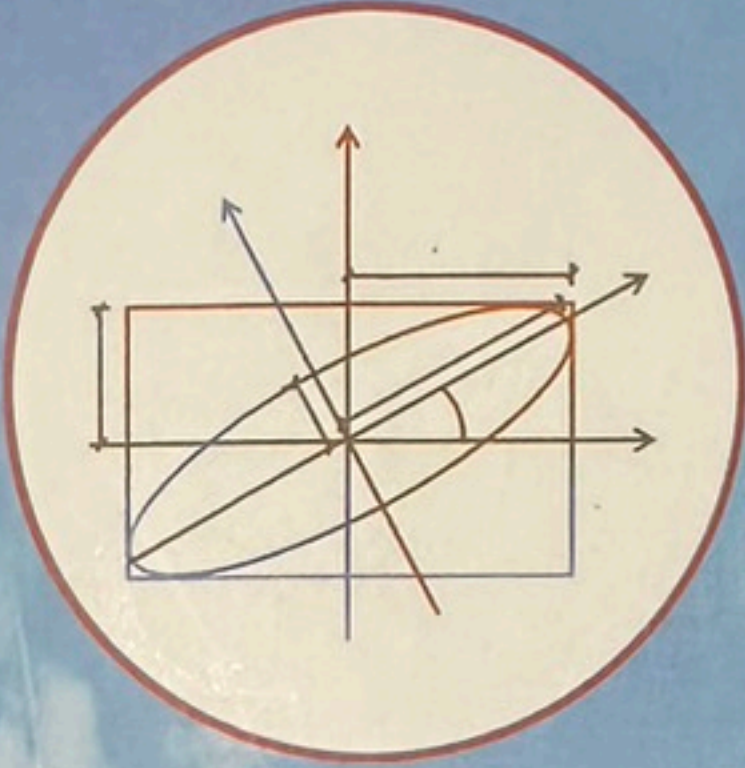




สำนักพิมพ์  
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

# การคำนวณปรับแก้ในงานสำรวจ



ตีบุญ เมธากุลชาติ



## สารบัญ

บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 การวัดและความคลาดเคลื่อน.....	1
1.2 ค่าน่าจะเป็นที่สุด.....	1
1.3 การวัดที่เกี่ยวข้อกับปริมาณเพียงสิ่งเดียว.....	2
1.4 การวัดที่เกี่ยวข้อกับปริมาณหลายสิ่ง.....	3
1.5 ทำไมจึงต้องมีการคำนวณปรับแก้.....	4
1.6 ค่าตรวจแก้.....	5
1.7 การปรับแก้กำลังสองน้อยที่สุด.....	5
1.8 น้ำหนักกับการคำนวณปรับแก้.....	6
1.9 ข้อตกลงและข้อสังเกตทั่วไปที่เกี่ยวข้อกับการคำนวณปรับแก้.....	8
บทที่ 2 การแพร่ของความคลาดเคลื่อน.....	10
2.1 เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม.....	10
2.2 องค์ประกอบความแปรปรวนและเมทริกซ์โคแฟกเตอร์.....	12
2.3 น้ำหนัก.....	13
2.4 การแพร่ของความแปรปรวน.....	15
บทที่ 3 แบบจำลองคณิตศาสตร์.....	20
3.1 แบบจำลอง.....	20
3.2 แบบจำลองคณิตศาสตร์ในการคำนวณปรับแก้.....	21
3.3 ชนิดของสมการในแบบจำลองคณิตศาสตร์.....	22
3.4 จำนวนสิ่งที่จำเป็นและค่าส่วนเกินซ้ำซ้อน.....	24
3.5 ตัวอย่างปัญหาในงานสำรวจกับค่าของจำนวนสิ่งที่จำเป็น.....	25
บทที่ 4 การปรับแก้โดยสมการค่าสังเกต.....	31
4.1 พารามิเตอร์.....	31
4.2 สมการค่าสังเกต.....	33



## สารบัญ (ต่อ)

4.3	คำตอบของการปรับแก้กำลังน้อยสุด.....	36
4.4	จำนวนสมการในแบบจำลอง.....	41
4.5	สรุปขั้นตอนของการปรับแก้โดยสมการค่าสังเกต.....	42
4.6	ตัวอย่างการคำนวณ.....	43
4.7	ตัวอย่างสมการค่าสังเกตของปัญหาในงานสำรวจ.....	55
บทที่ 5	การปรับแก้โดยสมการเงื่อนไข.....	64
5.1	สมการเงื่อนไข.....	64
5.2	คำตอบของการปรับแก้กำลังสองน้อยสุด.....	67
5.3	จำนวนสมการในแบบจำลอง.....	71
5.4	สรุปขั้นตอนของการปรับแก้โดยสมการเงื่อนไข.....	72
5.5	ตัวอย่างการคำนวณ.....	74
5.6	ตัวอย่างสมการเงื่อนไขของปัญหาในงานสำรวจ.....	83
บทที่ 6	การปรับแก้โดยสมการเงื่อนไขประกอบพารามิเตอร์.....	91
6.1	สมการเงื่อนไขประกอบพารามิเตอร์.....	91
6.2	คำตอบของการปรับแก้กำลังสองน้อยสุด.....	95
6.3	จำนวนสมการในแบบจำลอง.....	101
6.4	สรุปขั้นตอนของการปรับแก้โดยสมการเงื่อนไขประกอบพารามิเตอร์.....	101
6.5	ตัวอย่างการคำนวณ.....	103
6.6	ตัวอย่างสมการเงื่อนไขประกอบพารามิเตอร์ของปัญหาในงานสำรวจ.....	114
บทที่ 7	การวิเคราะห์ผลการปรับแก้.....	119
7.1	ภาพรวมการวิเคราะห์ผลการปรับแก้.....	119
7.2	การทดสอบองค์ประกอบความแปรปรวน.....	121
7.3	ทำไมการทดสอบองค์ประกอบความแปรปรวนจึงไม่ผ่าน.....	126
7.4	การทดสอบค่าตรวจแก้.....	127
7.5	ทำไมการทดสอบค่าตรวจแก้จึงไม่ผ่าน.....	132



## สารบัญ (ต่อ)

7.6	ผลกระทบของแบบจำลองคณิตศาสตร์กับการปรับแก้ .....	133
7.7	ผลกระทบของน้ำหนักและคุณภาพข้อมูลกับการปรับแก้ .....	134
บทที่ 8	วงรีความคลาดเคลื่อน .....	138
8.1	ที่มาของวงรีความคลาดเคลื่อน .....	138
8.2	รูปร่างและขนาดของวงรีความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน .....	139
8.3	ความน่าจะเป็นของวงรีความคลาดเคลื่อน .....	145
8.4	ตัวอย่างการคำนวณ .....	146
บทที่ 9	บทเบ็ดเตล็ด .....	149
9.1	ความแปรปรวนน้ำหนักหน่วย .....	149
9.2	ค่าสังเกตโดยตรง .....	149
9.3	ค่าสังเกตเอกพันธ์และค่าสังเกตปกติ .....	151
9.4	ตัวกรองกาลมานกับการปรับแก้กำลังสองน้อยที่สุด .....	152
9.5	การปรับแก้กำลังสองน้อยที่สุดกับการแปลความหมายเชิงเรขาคณิต .....	156
ภาคผนวก ก	.....	160
ภาคผนวก ข	.....	163
ภาคผนวก ค	.....	167
ภาคผนวก ง	.....	172
ภาคผนวก จ	.....	181
บรรณานุกรม	.....	185
ดัชนี	.....	187



## บทที่ 2

### การแพร่ของความคลาดเคลื่อน (PROPAGATION OF ERRORS)

การแพร่ของความคลาดเคลื่อนเป็นการศึกษาเรื่องเพื่อใช้หาความคลาดเคลื่อนของปริมาณวัดที่ไม่ได้เกิดจากการวัดโดยตรง เช่น วัดปริมาณของสิ่ง A และ B เพื่อหาค่าของปริมาณของสิ่ง C โดย C มีค่าเท่ากับ A บวก B เนื่องจาก ค่าของ C มิได้เกิดจากการวัดโดยตรง จึงไม่ทราบความคลาดเคลื่อน ทฤษฎีการแพร่ของความคลาดเคลื่อนใช้คำนวณความคลาดเคลื่อนของ C หากทราบความคลาดเคลื่อนของ A และ B

ทฤษฎีการแพร่ของความคลาดเคลื่อนมิได้ตั้งต้นที่ความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกต แต่ตั้งต้นที่ความแปรปรวน (variance) ของค่าสังเกต แล้วจึงคำนวณความแปรปรวนของปริมาณอื่นที่เกี่ยวข้อง หากจะเรียกว่า การแพร่ของความแปรปรวน ก็คงจะไม่ผิด

#### 2.1 เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม

เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม (variance and covariance matrix) คือ เมทริกซ์ที่เก็บค่าความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของปริมาณวัดตั้งแต่ 1 สิ่งขึ้นไป การใช้เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม ก็เพื่อลดความยุ่งยากในการเขียนสมการคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของค่าสังเกตหลายๆตัว

เมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม เรียกสั้นๆว่า เมทริกซ์ความแปรปรวน มีค่าความแปรปรวนอยู่ในแนวทแยง (diagonal) ของเมทริกซ์จากบนลงล่าง เรียงกันไปตามลำดับของค่าสังเกต ส่วนความแปรปรวนร่วมอยู่ในตำแหน่งที่มีเลขแถวและหลักตรงกันกับค่าสังเกตที่เป็นคู่ความแปรปรวนร่วมกันนั้นๆ หากไม่มีความแปรปรวนร่วมระหว่างค่าสังเกตคู่ใด ก็ใส่เลขศูนย์ลงไปในตำแหน่งตามคู่สังเกตนั้นๆ

กำหนดให้  $X$  คือ เวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม

$\Sigma_X$  คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม  $X$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$



$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1x_3} & \dots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2x_3} & \dots & \sigma_{x_2x_n} \\ \sigma_{x_1x_3} & \sigma_{x_2x_3} & \sigma_{x_3}^2 & \dots & \sigma_{x_3x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_1x_n} & \sigma_{x_2x_n} & \sigma_{x_3x_n} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1

$$\sigma_x^2 = 10 \quad \sigma_y^2 = 16 \quad \sigma_{xy} = 12$$

ดังนั้น

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\sigma_x^2 = 10 \quad \sigma_y^2 = 16 \quad \sigma_z^2 = 8 \quad \text{ความแปรปรวนร่วมไม่มี}$$

ดังนั้น

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3

ระยะ x วัดได้  $22.78 \pm 0.02$  เมตร

ระยะ y วัดได้  $350.67 \pm 0.03$  เมตร

และกำหนดให้การวัดระยะ x และ y เป็นอิสระไม่ขึ้นต่อกัน

ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวนของ x และ y คือ

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02^2 & 0 \\ 0 & 0.03^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0004 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0.0009 \text{ m}^2 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต

1. เมทริกซ์ความแปรปรวนอาจมีขนาด  $1 \times 1$  (หนึ่งคูณหนึ่ง) ก็ได้



2. เมทริกซ์ความแปรปรวนเป็นเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) เพราะความแปรปรวนร่วมระหว่าง  $x$  กับ  $y$  มีค่าเท่ากับความแปรปรวนร่วมระหว่าง  $y$  กับ  $x$
3. ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมเป็นปริมาณที่มีหน่วย
4. หน่วยของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมเป็นหน่วยเดียวกับหน่วยของปริมาณวัด แต่ยกกำลังสอง

## 2.2 องค์ประกอบความแปรปรวนและเมทริกซ์โคแฟกเตอร์

เมทริกซ์ความแปรปรวนสามารถแยกตัวเองออกเป็น 2 องค์ประกอบ โดยองค์ประกอบตัวที่หนึ่งเป็นตัวเลข เรียกว่า องค์ประกอบความแปรปรวน (variance component) และองค์ประกอบตัวที่สองเป็นเมทริกซ์ เรียกว่า เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ (cofactor matrix) เมื่อนำองค์ประกอบทั้งสองมาคูณกัน จะได้เมทริกซ์ความแปรปรวน เขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q \quad (2.1)$$

โดย

$\Sigma$  คือ เมทริกซ์ความแปรปรวน

$\sigma_0^2$  คือ องค์ประกอบความแปรปรวน

$Q$  คือ เมทริกซ์โคแฟกเตอร์

หน่วยของเมทริกซ์โคแฟกเตอร์เป็นหน่วยเดียวกันกับหน่วยของความแปรปรวน แต่องค์ประกอบความแปรปรวนเป็นเพียงตัวเลขที่ไม่มีหน่วย และจะเป็นเลขอะไรก็ได้ องค์ประกอบความแปรปรวนมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ความแปรปรวนน้ำหนักหนึ่งหน่วย (variance of unit weight)

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของเมทริกซ์ความแปรปรวนที่แยกตัวออกเป็น 2 องค์ประกอบ ในแบบต่างๆกัน ดังนี้

### ตัวอย่างที่ 1

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sigma_0^2 Q \\ &= 1 \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## ตัวอย่างที่ 2

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 2$$

ดังนั้น

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q = 2 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

## ตัวอย่างที่ 3

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 4$$

ดังนั้น

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q = 4 \begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 2.5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง จะเห็นว่าเมทริกซ์ความแปรปรวนตัวเดียวกัน สามารถมีองค์ประกอบความแปรปรวนได้หลายค่า เพราะองค์ประกอบความแปรปรวนจะเป็นเลขอะไรก็ได้ แต่ว่าเมื่อองค์ประกอบความแปรปรวนเป็นเลขใดแล้ว เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ก็จะต้องเปลี่ยนตามไปให้สอดคล้องด้วย เพื่อให้ผลคูณขององค์ประกอบความแปรปรวนและเมทริกซ์โคแฟกเตอร์ มีค่าเท่ากับเมทริกซ์ความแปรปรวน

## 2.3 น้ำหนัก

ในการคำนวณปรับแก้ น้ำหนักเป็นตัวแปรที่สำคัญมากที่มีผลต่อการคำนวณปรับแก้ หมายความว่าผลของการคำนวณปรับแก้จะออกมาเป็นเช่นไร ขึ้นอยู่กับน้ำหนักของค่าสังเกตที่กำหนดเข้าไป ค่าสังเกตที่มีน้ำหนักมาก จะได้รับค่าตรวจแก้ที่น้อย และค่าสังเกตที่มีน้ำหนักน้อย จะได้รับค่าตรวจแก้ที่มาก ในทฤษฎีการคำนวณปรับแก้ เรื่องของน้ำหนักเป็นเรื่องของความสัมพันธ์ ไม่จำเป็นต้องรู้น้ำหนักที่แท้จริงของค่าสังเกต เพียงทราบค่าสัมพัทธ์หรือค่าเปรียบเทียบของระหว่างน้ำหนักของค่าสังเกตทั้งหลาย ก็ทำการคำนวณปรับแก้ได้แล้ว

ทฤษฎีการคำนวณปรับแก้ได้นิยามความหมายของน้ำหนักว่า น้ำหนัก คือ ส่วนกลับของโคแฟกเตอร์ และในทำนองกลับกัน โคแฟกเตอร์ก็เป็นส่วนกลับของน้ำหนัก เขียนความสัมพันธ์ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$P = Q^{-1} \quad (2.2)$$



$$Q = P^{-1}$$

โดย

P คือ เมทริกซ์น้ำหนัก

Q คือ เมทริกซ์โคแฟกเตอร์

เนื่องจากน้ำหนักเป็นส่วนกลับของโคแฟกเตอร์ ดังนั้น น้ำหนักจึงเป็นปริมาณที่มีหน่วย และหน่วยของน้ำหนักเป็นส่วนกลับกับหน่วยของโคแฟกเตอร์และความแปรปรวน

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของเมทริกซ์ความแปรปรวน โคแฟกเตอร์ และน้ำหนัก ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 1$$

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \\ -0.75 & 0.625 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{และกำหนดให้ } \sigma_0^2 = 2$$

$$\Sigma = \sigma_0^2 Q$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1.5 \\ -1.5 & 1.25 \end{bmatrix}$$

ข้อสรุปเรื่องความแปรปรวน โคแฟกเตอร์ และน้ำหนัก

1. เมทริกซ์ความแปรปรวน โคแฟกเตอร์ และน้ำหนัก มีหน่วยเสมอ



2. หน่วยของความแปรปรวน โคแฟกเตอร์ และน้ำหนัก เป็นหน่วยเดียวกับหน่วยของปริมาณวัดหรือค่าสังเกต เช่น วัดระยะทางเป็นเซนติเมตร หน่วยของความแปรปรวน และ โคแฟกเตอร์ ก็เป็น ซม.<sup>2</sup> และหน่วยของน้ำหนัก ก็เป็น ซม.<sup>-2</sup>
3. องค์ประกอบความแปรปรวนเป็นตัวคูณมาตรฐานของเมทริกซ์โคแฟกเตอร์ และเป็นตัวเลขที่ไม่มีหน่วย
4. ความแปรปรวนมีค่าเดียว แต่องค์ประกอบความแปรปรวนมีได้หลายค่าเพราะเป็นเลขอะไรก็ได้ เมื่อค่าขององค์ประกอบความแปรปรวนเปลี่ยนไป ค่าของโคแฟกเตอร์ก็ต้องเปลี่ยนตามไปด้วย
5. ทั้งโคแฟกเตอร์ และน้ำหนัก เป็นเพียงค่าสัมพัทธ์ จะทราบค่าที่แท้จริง (สัมบูรณ์) ได้ ต้องอาศัยค่าองค์ประกอบความแปรปรวน

## 2.4 การแพร่ของความแปรปรวน

### กรณีสมการเชิงเส้น

เริ่มจากสมการตั้งต้น

$$Y = AX + L_0 \quad (2.4)$$

โดย

- Y คือ ปริมาณที่ต้องการทราบค่า
- X คือ ปริมาณที่เกิดจากการวัด
- A คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของปริมาณวัด
- L<sub>0</sub> คือ ค่าคงที่ (อาจมีหรือไม่มีก็ได้)

**ปัญหา** X เป็นค่าสังเกตที่เกิดจากการวัด และ Y เป็นฟังก์ชันของ X (เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น)

หากทราบความแปรปรวนของ X อยากทราบว่าความแปรปรวนของ Y เป็นเท่าไร

**แนวคิด** เนื่องจาก L<sub>0</sub> เป็นค่าคงที่ จึงไม่มีความแปรปรวน คงมีแต่ความแปรปรวนของ X ที่แพร่มาสู่ Y ดังนี้

$$\Sigma_Y = A \Sigma_X A^T \quad (\text{ดูรายละเอียดของที่มาของสมการนี้ ในภาคผนวก จ}) \quad (2.5)$$

โดย

- $\Sigma_Y$  คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนของ Y
- $\Sigma_X$  คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนของ X